

Exemplo:

114

① $P_2(\mathbb{R})$ c/ p.i. $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx$

$$q(x) = 1 - x^2$$

$p(x) = ?$ que melhor aproxima $q(x)$ em $P_1(\mathbb{R})$?

1º Base ortogonal p/ $P_1(\mathbb{R})$

$$q_1(x) = 1$$

$$q_2(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$\beta = \left\{ 1, x - \frac{1}{2} \right\}$ é base ortogonal de $P_1(\mathbb{R})$.

2º $\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} q(x)$

$$\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} q(x) = \frac{\langle q(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle q(x), x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{6} - x$$

AUTOVALORES E AUTOVECTORES

115

$V \subseteq \text{e.v. real}$

$T: V \rightarrow V$ op. linear

Pergunta:

Quais são $v \in V$ tq $T(v) = -v$?

(1) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y) = (-x, -y)$

R : p/ quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y) = (x + 2y, -y)$

R : $(-y, y)$ $y \in \mathbb{R}$

Pergunta:

Quais são os elementos $v \in V$, não-nulos, que são levados pelo op. T , em múltiplos de si mesmo?

? $v \in V$ tq $T(v) = \lambda v$?
 $v \neq 0_V$

Definição 10 $V \equiv \text{e.v. real}$, $T: V \rightarrow V$ op. linear.

Se existir $v \in V$, $v \neq 0_V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tq
 $T(v) = \lambda v$, dizemos que λ é autovvalor de T e
 v é um autovetor de T associado a λ .

Definição 11 $V \equiv \text{e.v. real}$, $T: V \rightarrow V$ op. linear.

Fixado um autovvalor λ de T , ^o ~~definimos~~ subconjunto

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

é denominado auto-espaço em rel. ~~ao~~ a λ .

Obs : $\rightarrow V_\lambda$ é subespaço vetorial

$$\rightarrow \text{Ker}(T - \lambda I_V) = V_\lambda$$

Ex.

① $V \equiv \text{e.v. real}$ ~~definido~~, $T: V \rightarrow V$ op. linear

λ_1, λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovvalores de $T \Rightarrow$

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$$

$$v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow \begin{aligned} T(v) &= \lambda_1 v \\ T(v) &= \lambda_2 v \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0_V \Rightarrow v = 0_V$$

AUTOVALOR E AUTOVETOR DE UMA MATRIZ

115

$V \equiv$ espaço vetorial $\dim V = n$

$T: V \rightarrow V$ op. linear

Problema:

Encontrar $v \neq 0_V$ tq $T(v) = \lambda v$

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow$$

$$T(v) = \lambda I(v) \Rightarrow$$

$$T(v) - \lambda I(v) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(T - \lambda I)(v) = \vec{0}$$

$\hookrightarrow$ Solucionar esse problema

$\hookrightarrow \exists v \neq 0_V$ solução do problema $\Leftrightarrow$

$$\text{Ker}(T - \lambda I_V) \neq \{0_V\}$$

Então seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V ,

$[T]_\beta$ representação de T na base $\beta \Rightarrow$

a matriz $[T]_\beta - \lambda I_n$ é a rep. matricial de

$T - \lambda I_V$ na base β . Como $\text{Ker}(T - \lambda I_V) \neq \{0_V\}$

logo o operador $T - \lambda I_V$ não é injetor, e an-

sim $[T]_\beta - \lambda I_n$ não é invertível, ou seja,

$$\det([T]_\beta - \lambda I_n) = 0.$$

Ou seja, λ é autovalor de $T \Leftrightarrow \det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I) = 0$

116

Definição 39: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovalor da matriz A é um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ é chamado de polinômio característico da matriz A .

Definição 40: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que B é semelhante à matriz A se $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Obs:

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(P) \det(A) \\ &= \det(P^{-1}P) \det(A) \\ &= \det(I_n) \det(A) \\ &= 1 \cdot \det(A) = \det(A)\end{aligned}$$

Teorema 41: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

dem ~~teorema~~:

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } B = P^{-1}AP \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\
 &= \det(P^{-1} \cdot P) \det(A - \lambda I_n) \\
 &= \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

Teorema 42: Sejam V um e.v. real de dim. finita,
 $T: V \rightarrow V$ op. linear e β, β' bases de V . Então

$$[T]_{\beta'} = [M]_{\beta', \beta} [T]_{\beta} [M]_{\beta, \beta'}$$

onde $[M]_{\beta', \beta}$ é a matriz de mudança de base de β p/ β'
 $[M]_{\beta, \beta'}$ " " " " β' p/ β

dem: Exercício para casa!

Corolário: Sejam V um e.v. real de dim. finita,
 $T: V \rightarrow V$ op. linear e β, β' bases de V . Então

$$\det([T]_{\beta'}) = \det([T]_{\beta})$$

dem: Exercício para casa!

Definição 41: Sejam V um e.v. real de dim. finita,
 $T: V \rightarrow V$ um op. linear e β uma base de V .

Definimos o determinante do operador T como

$$\det(T) = \det([T]_{\beta}).$$

Teorema 43 Sejam V um e.v. real de dim. finita, 13
 $T: V \rightarrow V$ um op. linear. Então T é invertível se, e
somente se, $\det(T) \neq 0$.

Dem: OK!

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad T(p(x)) = p(x) + x p'(x)$$

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = 6 \neq 0$$

Então T é um operador invertível!

Definição 42 Sejam V um e.v. de dim. finita e $T: V \rightarrow V$
um op. linear. Definimos o polinômio característico
do op T como sendo o polinômio característico de
 $[T]_{\mathcal{B}}$ em relação à qualquer base $\mathcal{B}$ de V .

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \text{ do ex. acima}$$

$$p(\lambda) = \det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_n) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

é o polinômio característico do op. T .

Proposição : Sejam V um e.v. real de dim. finita, $\dim(V) = n$ e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Então os autovalores de T são os escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ que são raízes do polinômio característico de $[T]_{\beta}$ em relação a qualquer base β de V .

Dem : $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de $T \Rightarrow T(v) = \lambda v$ tem solução não-nula $\Rightarrow (T - \lambda I_V)(v) = \vec{0}$ tem sol. não-nula, ou seja, $\text{Ker}(T - \lambda I_V) \neq \{0_V\}$. Seja β base de V qualquer, logo $[T]_{\beta} - \lambda I_n$ é a rep. matricial do operador $T - \lambda I_V \Rightarrow \det([T]_{\beta} - \lambda I_n) = 0$ logo,

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ é autovalor de } T \Leftrightarrow \det([T]_{\beta} - \lambda I_n) = 0.$$

Exemplos :

$$\textcircled{1} \quad T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(p(t)) = (1+t)p'(t) + p''(t)$$

$$\text{can} = \{1, t, t^2\}$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ são autovalores

$$V_{\lambda_1} = \text{Ker}(T) \Rightarrow T \text{ não é injetor!}$$

120

$$\textcircled{2} \quad T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (2x + 2y, y)$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det([T]_{\text{can}} - \lambda I_n) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) \\ = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ autovalores de } T$$

$$\rightarrow v_1 = (1, 0)$$

$$\rightarrow v_2 = (-2, 1)$$

$$\textcircled{2} \quad [T]_{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \{ (1, 1), (-1, 1) \}$$

$$p(\lambda) = ?$$

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{autovalores e autovetores?}$$

$$T_A(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 4z, -x - y - 2z)$$

$$[T_A]_{\text{can}} = A$$

$$p(\lambda) = \det([T_A]_{\text{can}} - \lambda I_3) \stackrel{?}{=} 0$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{array}{l} \text{autovetor} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \rightarrow (1, -1, 0) \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow (0, 1, -1) \\ \lambda_3 = 3 \rightarrow (2, 3, -1) \end{array} \right. \end{array}$$

$$(4) \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x, -3y)$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

↳ único autovalor, já que no curso

V é sempre $\mathbb{R}$ real.

$$(5) \quad T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x+x^2)$$

Autovalores e autovetores de T ?

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \quad \text{base canônica}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0 \quad \text{autovalores}$$

↓

↓

↓

$$(0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$(1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$(0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$$

autovetores

$$V_{\lambda_1} = [x+x^2]$$

$$V_{\lambda_2} = [1-x-x^2]$$

$$V_{\lambda_3} = [x-x^2]$$

Definição 45: Definimos a multiplicidade algébrica

12

de autovalor λ como sendo a quantidade de vezes que ele aparece como raiz de polinômio característico

Definição 46: Definimos a multiplicidade geométrica de autovalor λ como sendo a dimensão do subespaço V_λ associado ao autovalor λ .

Exemplos:

① $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$T_A(x, y, z) = (2x - y + z, 3y - z, 2x + y + 3z)$$

$$A = [T_A]_{can}$$

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 & m_a = 2 \\ \lambda_2 = 4 & m_a = 1 \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = [(1, -1, -1)] \quad m_g = 1$$

$$V_{\lambda_2} = [(1, -1, 1)] \quad m_g = 1$$

②

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T_A = (2x + y + z, 2x + 3y + 2z, 3x + 3y + 4z)$$

$$A = [T_A]_{can}$$

$$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_a = 2 \\ \lambda_2 = 7 & m_a = 1 \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = [(1, 0, 1), (0, 1, -1)] \quad m_g = 2$$

$$V_{\lambda_2} = [(1, 2, 3)] \quad m_a = 1$$

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES LINEARES

$V \equiv$ e.v. real de dim. finita

$T: V \rightarrow V$ operador linear

Pergunta:

Sob que condições V possui uma base β , tal que

$[T]_{\beta}$ seja uma matriz diagonal?

Teorema 44: Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, β uma base de $\mathbb{R}^n$, 124

$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operador linear associado a matriz A .

Então

$$[T_A]_{\beta} = M^{-1} A M$$

onde M é a matriz de mudança de base β p/ can de $\mathbb{R}^n$.

Dem: Exercício p/ can!

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \{(1, 2), (1, 1)\}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_A] = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

~~can~~ ~~can~~
 $T_A = [T_A]_{\text{can}} \Rightarrow$

$$[T]_{\beta} = M_{\text{can}, \beta} [T]_{\text{can}} M_{\beta, \text{can}}$$

$$[M_{\beta, \text{can}}^{-1}] [T]_{\text{can}} M_{\beta, \text{can}} =$$

Teorema 45: Sejam V um e.v. real de dim. finita,

β uma base de V , $T: V \rightarrow V$ um op linear e

~~B~~ B uma matriz semelhante a $[T]_{\beta}$. Então existe

uma base β' de V tal que $B = [T]_{\beta'}$.

Demonstração: $\sim$ que $\dim V = n$

124

Suponha que a matriz $B \sim [T]_{\beta}$.

Então $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ invertível tal que

$$B = P^{-1} [T]_{\beta} P, \quad P = [p_{ij}]$$

Vamos definir a base $\mathcal{b} = \{w_1, \dots, w_n\}$

tg $B = [T]_{\mathcal{b}}$. Chame $\beta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Defina:

$$w_1 = \sum_{i=1}^n p_{i1} \varphi_i$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^n p_{i2} \varphi_i$$

$$w_n = \sum_{i=1}^n p_{in} \varphi_i$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Então $\mathcal{b}$ é base de V

Note que $P = M_{\mathcal{b}, \beta}$

$$\text{Logo } [T]_{\mathcal{b}} = M_{\mathcal{b}, \mathcal{b}} [T]_{\beta} M_{\mathcal{b}, \beta}$$

$$= M_{\mathcal{b}, \beta}^{-1} [T]_{\beta} M_{\mathcal{b}, \beta}$$

$$= P^{-1} [T]_{\beta} P = B.$$

O estudo das matrizes semelhantes é muito importante para o estudo de diagonalização de operadores lineares, já que esse problema pode ser reformulado no contexto de matrizes.

Definição 46: Sejam V um e.v. real de dim. finita, $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V tal que $[T]_{\beta}$ é uma matriz diagonal.

Definição 47: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma matriz diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal.

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \rightarrow \quad v_1 = (1, 1)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \rightarrow \quad v_2 = (1, -1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz diagonal}} \left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right]$$

matriz
diagonal

A é semelhante a uma matriz diagonal $\Rightarrow A$ é diagonalizável

Dem. teo 46:

126

(61)

$(\Rightarrow)$ suponha que T é diagonalizável.

Então existe uma base β de V tal que

$[T]_{\beta}$ é uma matriz diagonal. Sabemos que

$$\begin{aligned} [T]_{\beta} &= M_{\beta, \beta}^{-1} [T]_{\beta} M_{\beta, \beta} \\ &= M_{\beta, \beta}^{-1} [T]_{\beta} M_{\beta, \beta} \end{aligned}$$

Logo $[T]_{\beta}$ é semelhante a uma matriz diagonal.

Então a matriz $[T]_{\beta}$ é diagonalizável.

$(\Leftarrow)$ Se $[T]_{\beta}$ é diagonalizável, então $[T]_{\beta}$ é

semelhante a uma matriz diagonal B . Do Teorema 45

$\exists$ uma base β de V tal que $B = [T]_{\beta}$, ou

seja $\exists$ base β de V tal que $[T]_{\beta}$ é uma matriz diagonal.

Portanto T é um operador diagonalizável.

Teorema 46: Sejam V um e.v. real de dim. finita,

(126)

β uma base de V e $T: V \rightarrow V$ operador linear.

Então T é diagonalizável se, e somente se, $[T]_{\beta}$ é diagonalizável

Dem: ~~o mesmo argumento~~

Corolário: Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ op. linear associada a matriz A . Então A é diagonalizável se, e somente se, T_A é diagonalizável.

Definição 48: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma matriz simples se possui um conjunto de n autovetores linearmente independentes.

Teorema 47 Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Então A é uma matriz simples se, e somente se, A é uma matriz diagonalizável.

Dem: exercício p/ casa!

Exemplos:

① $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$$

T é diagonalizável?

$$p(\lambda) = -(3-\lambda)^2(1+\lambda)$$

$$\lambda_1 = 3 \quad m_a = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad m_a = 1$$

$$V_3 = [(1,0,0), (0,1,0)] \quad m_g = 2$$

$$V_{-1} = [(-4,5,-4)] \quad m_g = 1$$

Pelo Teorema anterior $[T]_{can}$ é diagonalizável.

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (-4,5,-4)\}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Defina $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (-4,5,-4)\}$

$$T(1,0,0) = 3(1,0,0)$$

$$T(0,1,0) = 3(0,1,0)$$

~~clearly~~

$$T(-4,5,-4) = -1(-4,5,-4)$$

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ou seja $\exists \beta \equiv \text{base de } \mathbb{R}^3$

tg $[T]_{\beta}$ é diagonal!

Teorema 48 : Sejam V um e.v. real,

$T: V \rightarrow V$ um operador linear que possui autovaleurs distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ com $v_1, \dots, v_k$ auto-vetores associados. Então $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente em V .

Dem: Por indução:

para $k=1 \Rightarrow \{v_1\}$ é l.i. em V , já que $v_1 \neq 0_V$.

Suponha que para k , temos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ seja l.i. Verifiquemos que $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ é l.i. Considere uma comb. linear nula de $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$:

$$(*) \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0_V \Rightarrow$$

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = T(0_V) = 0_V$$

||

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1})$$

||

$$(**) \quad \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}$$

multiplicando (*) por λ_{k+1} :

129

$$\lambda_{k+1} (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \lambda_{k+1} 0_V = 0_V$$

Subtraindo (**) - (*):

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda_1 v_1 - \lambda_{k+1} \alpha_1 v_1) + (\alpha_2 \lambda_2 v_2 - \lambda_{k+1} \alpha_2 v_2) + \\ & \dots + (\alpha_k \lambda_k v_k - \lambda_{k+1} \alpha_k v_k) + (\alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} - \lambda_{k+1} \alpha_{k+1} v_{k+1}) \\ & \qquad \qquad \qquad = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i$$

Como $\{v_1, \dots, v_k\}$ é l.i. então

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Como os autovalores são distintos então $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$

$\forall i = 1, \dots, k$. Ou seja $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

Assim substituindo em (*) temos,

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0_V$$

Portanto $\alpha_{k+1} = 0$. E os vetores $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ são

l.i. em V

Corolário : Sejam V um e.v. real de dimensão finita, digamos $\dim V = n$ e $T: V \rightarrow V$ um operador linear que possui n autovalores distintos. Então T é diagonalizável.

Dem. Exercício para casa!

Teorema 49 : Sejam V um e.v. real de dimensão finita e $T: V \rightarrow V$ um operador linear sobre V . Então T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T .

Dem
 $(\Rightarrow)$ se T é diagonalizável, então $\exists \beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

base de V tal que $[T]_\beta$ é uma matriz diagonal.

Seja $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ essa matriz, onde os escalares

λ_i não são necessariamente distintos.

Então $T(v_1) = \lambda_1 v_1$
 $T(v_2) = \lambda_2 v_2$
 $\vdots$
 $T(v_n) = \lambda_n v_n$

Logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base formada por autovetores.

($\Leftarrow$) Se $\exists \beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V
formada por autovetores de T , então

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$\vdots$

$$T(v_n) = \lambda_n v_n$$

, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$

são os autovalores

associados!

Então $[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Por isso $[T]_{\beta}$ é uma matriz diagonal. Ou seja
 T é diagonalizável!

Critério: Sejam V um e.v. real de dim. finita
e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Então T é
diagonalizável se, e somente se, $m_a = m_g$ para
cada autovalor de T .

Exemplos

① $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (x + 3y, 4x + 2y)$$

T é diagonalizável?

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

132

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 & m_a = 1 & v_1 = (3, 4) & m_g = 1 \\ \lambda_2 = -2 & m_a = 1 & v_2 = (1, -1) & m_g = 1 \end{cases}$$

$\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores,

Logo T é diagonalizável

$$(2) \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (2y, 2x, 2z)$$

T é diagonalizável?

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -(2-\lambda)^2(\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = 2 \quad m_a(2) = 2$$

$$\lambda_2 = -2 \quad m_a(-2) = 1$$

$$V_2 = [(1, 1, 0); (0, 0, 1)] \quad m_g(2) = 2$$

$$V_{-2} = [(1, -1, 0)] \quad m_g(-2) = 1$$

$m_a = m_g$. p/ cada autovetor. Logo

T é diagonalizável!

$$(3) \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$$

T é diagonalizável?

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \rightarrow (1, 1) \\ \lambda_2 = -2 & \rightarrow (4, 1) \end{cases}$$

$$(4) \quad T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$T(p(t)) = (1+t)p'(t) + p''(t)$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow (1, 1, 0)$$

$$\lambda_3 = 2 \rightarrow (2, 2, 1)$$

$$\beta = \{1, 1+t, 2+2t+t^2\}$$

~~$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$~~

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (y + 3x + 3, x + y)$$

T diagonalizable?

THE END!

